Épreuve de Mathématiques A

Durée 4h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précisions** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies.** En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leur calculs.

CONSIGNES :

— Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à encre foncée : bleue ou noire

— L'usage de stylo à friction, stylo plume, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

— Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

— Le candidat rédigera sur trois copies qu'il intitulera :

- Mathématiques A-1 : Problème d'algèbre linéaire, Parties I.A) et I.B)
- Mathématiques A-2 : Problème d'algèbre linéaire, Partie II
- Mathématiques A-3 : Exercice de Probabilités

et rendra obligatoirement trois copies, même si certaines devaient être blanches, en mettant son numéro d'anonymat sur les trois copies.

$\boxed{\textbf{Partie I}}$ **À rédiger impérativement sur une copie intitulée Mathématiques A-I**

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

Pour tous entiers strictement positifs n, p, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I_n désigne la matrice identité d'ordre n. Pour une matrice A, $A^\top$ désigne sa matrice transposée

Partie I. A)

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

3. Déterminer une relation entre A^2, A et I_n.
   En déduire une relation entre A^{n+1}, A^n et A^{n-1} pour tout entier $n \geqslant 1$.

4. Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

   qui vérifient la relation de récurrence

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2u_{n-1} \\ v_{n+1} &= v_n + 2v_{n-1} \end{cases}$$

5. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Partie I. B)

Dans toute cette partie, on se fixe un entier $n \geqslant 1$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices B, C de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ vérifiant :

$$A = \lambda B + \mu C \qquad (1)$$

$$A^2 = \lambda^2 B + \mu^2 C \qquad (2)$$

$$A^3 = \lambda^3 B + \mu^3 C. \qquad (3)$$

1. Exprimer B et C en fonction de A et A^2. En déduire que $A^3 = (\lambda + \mu) A^2 - \lambda\mu A$

2. Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $A^p = \lambda^p B + \mu^p C$

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. On note $f^p = f \circ \cdots \circ f$ la $p^{\text{ième}}$ composée de f. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^p$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda + \mu) f^p(x) - f^{p+1}(x)$.

   (c) En déduire que $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f$.

   (d) Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^p)$.

$\boxed{\text{Partie II}}$ À rédiger impérativement sur une copie intitulée Mathématiques A-II

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

On se donne toujours un entier $n \geqslant 1$ fixé.

Soit U et V les matrices colonnes : $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

On suppose U et V non nulles. Soit a un réel et A la matrice définie par

$$A = aI_n + UV^\top.$$

1. Montrer que $V^\top U$ est un réel que l'on exprimera en fonction des coefficients u_i et v_i.

2. Montrer qu'il existe un réel k tel que $\left(UV^\top\right)^2 = k\left(UV^\top\right)$.
   En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.

3. On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Donner l'expression de a_{ij} en fonction de a et des coefficients de U et V.
   En déduire que $\mathrm{Tr}\,(A) = na + V^\top U$.

4. Exprimer α et β en fonction de a et de $\mathrm{Tr}\,(A)$.

5. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2.
   En déduire que λ vérifie l'équation
   $$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0.$$

6. Montrer que les seules valeurs propres possibles de A sont
   $$\lambda_1 = a \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \mathrm{Tr}\,(A) - (n-1)\,a.$$

7. On suppose que $\mathrm{Tr}\left(UV^\top\right) \neq 0$ et on considère les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 définis par
   $$E_i = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = \lambda_i X\right\}.$$

   (a) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

   (b) Montrer par analyse-synthèse que, pour tout vecteur colonne X, il existe $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$ tels que $X = X_1 + X_2$.

   (c) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

8. Montrer que la matrice A de la première partie est de ce type.

Partie III , Exercice de Probabilités **À rédiger impérativement sur une copie intitulée Mathématiques A-III**

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

Exercice de Probabilités

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.

   (a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > n)$.

   (b) Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p. On note T le rang du 1er succès obtenu : $T = \inf\{k \geqslant 1,\ X_k = 1\}$. Montrer que T a même loi que X.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.

   (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(X+Y=n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X=k, Y=n-k)$

   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(X+Y=n) = p^2(n-1)(1-p)^{n-2}$.

   (c) Déterminer, pour $n \geqslant 2$, la loi de X sachant $X+Y=n$.

3. On considère toujours X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On pose $T = \max(X,Y)$ et $Z = \min(X,Y)$. On pose $q = 1-p$.

   (a) Montrer que $\mathbb{P}(X=Y) = \dfrac{p}{1+q}$.

   (b) i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z=n) = \mathbb{P}(Z > n-1) - \mathbb{P}(Z > n)$

   ii. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z > n)$

   iii. Montrer que Z suit une loi géométrique de paramètre $1-q^2$

   (c) Déterminer la loi de T.